

定日镜场的优化设计分析

摘要

塔式太阳能光热发电是一种低碳环保的新型清洁能源技术，建立大规模太阳能热发电站，可缓解我国能源紧缺的局面，满足人们用电量大的需求。但太阳能发电塔系统的成本较高，在这种情况下，合理设计定日镜和吸收塔的各项参数使光能效率最大化就显得尤为重要。本题意在计算定日镜场的各种衡量指标，并根据这些指标来优化定日镜场的布局设计以实现最大的光能利用率。

问题一要求在定日镜各项参数固定化的情况下求出年平均光学效率、年平均输出热功率，以及单位镜面面积年平均输出热功率这几个指标，难点在于求阴影遮挡效率和余弦效率。对于前者，通过分析学者对相似经纬度区域的数据和结论，找到该区域阴影损失与太阳高度角的关系，进而估算出阴影遮挡率。而后我们建立了余弦效率几何模型，利用空间解析几何解出了余弦效率与定日镜坐标和太阳角度的确切关系。其他指标包括年平均光学效率、输出热功率，以及单位镜面面积年平均输出热功率直接通过公式便可计算得到。

问题二和问题三都是在问题一的基础上进行参数优化，合理设计定日镜场的各项参数，在保证定日镜场的额定年平均输出热功率不少于 60MW 的情况下，使单位镜面面积年平均输出热功率最大化。相较于问题二，问题三提出不同定日镜尺寸和安装高度可以各不相同，大大提高了问题三模型的时间复杂度。两道题整体思路都是先建立一个太阳角度的框架，然后利用几何知识建立未知参数间的函数关系，结合题中的已知条件，选用网格搜索法对多个参数不断进行迭代优化，穷举所有的参数组合，最后得到全局最优解。

在模型改进方面，为了减少阴影遮挡效率的误差，我们还提出了遮挡判别模型和遮挡损失计算模型。这两个模型可用于判断定日镜是否被遮挡，以及在遮挡时计算相应的阴影损失。

关键词： 网格搜索算法 多参数目标规划 遮挡判别模型 余弦效率

一、问题重述

1.1 问题背景

我国是能源消耗大国，不可再生能源紧缺。塔式太阳能光热发电是一种低碳环保的新型清洁能源技术，建立大规模太阳能热发电站，可缓解我国能源匮乏的局面，满足人们用电需求，也是开发和利用太阳能的一个重要途径。但太阳能发电塔系统的成本较高，在这种情况下，如何合理设计定日镜及吸收塔来最大化光能效率就显得尤为重要。

1.2 问题提出

定日镜是塔式太阳能光热发电站收集太阳能的基本组件，现计划建设一个圆心在东经 98.5° ，北纬 39.4° ，海拔 3000 m ，半径 350 m 的圆形定日镜发电场。针对上述背景和需求，提出下列功率计算和镜场优化布置问题：

1. 若定日镜尺寸为 $6\text{ m}\times 6\text{ m}$ ，安装高度为 4 m ，且给定所有定日镜中心的位置，计算该定日镜场的年平均光学效率、年平均输出热功率，以及单位镜面面积年平均输出热功率。
2. 规定定日镜场的额定年平均输出热功率为 60 MW ，且所有定日镜尺寸及安装高度相同，要求设计吸收塔的位置坐标、定日镜尺寸、安装高度、定日镜数目、定日镜位置，使得定日镜场在达到额定功率的条件下，单位镜面面积年平均输出热功率尽量大。
3. 在第二问基础上，定日镜尺寸可以不同，安装高度也可以不同，再次设计吸收塔的位置坐标、定日镜尺寸、安装高度、定日镜数目、定日镜位置，使在达到额定功率的条件下，单位镜面面积年平均输出热功率尽量大。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

第一问要求求出定日镜场的年平均光学效率、输出热功率，以及单位镜面面积年平均输出热功率。题目给出了 1745 个定日镜其中心在镜场坐标系中坐标 x, y 值，且定日镜的安装高度均为 4 m ，对附件数据可视化，得到如下的定日镜场 3D 模型图，定日镜围绕着吸收塔呈圆周分布，且前后左右交错排列，减少遮挡以提高光利用率。要求光学效率和热功率，难点在于求阴影遮挡效率和余弦效率。对于前者，我们通过分析学者对相似经纬度的区域的数据和结论，找到该区域阴影损失与太阳高度角的关系，进而估算出阴影遮挡率。

对于后者，我们建立了定日镜反射太阳光的几何模型，利用空间解析几何解出了余弦效率与定日镜坐标和太阳角度的确切关系，接着便可以计算各时各镜的余弦效率。其他指标包括年平均光学效率、输出热功率，以及单位镜面面积年平均输出热功率通过公式便可计算得到。

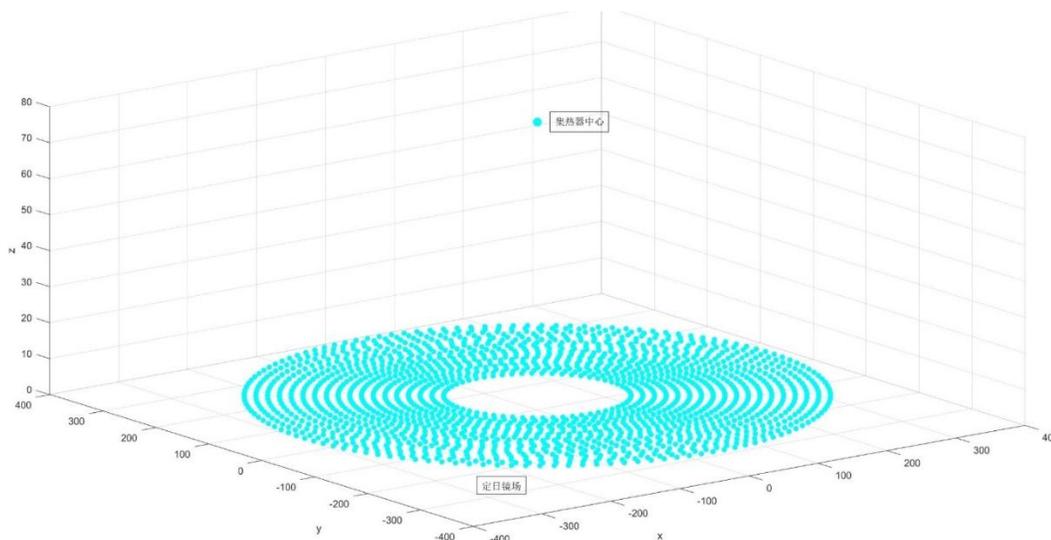


图 1 定日镜场 3D 模型图

2.2 问题二的分析

问题二要求在定日镜场年平均输出热功率达到 60MW 的前提下，设置定日镜场的相关参数保证单位镜面面积年平均输出热功率尽可能大。这是一个单目标复杂参数的优化问题，复杂点在于定日镜的坐标，高度，尺寸都未知，所给信息有限。我们的思路是在问题一模型和导出的公式的基础上，设出各参数并代进公式，将光学效率和热功率参数化表示。但题中未知量较多，优化难度大，所以我们适当的对模型进行简化，进而确定约束条件，接着利用网格搜索法进行参数优化，对每个参数组合进行模型的训练和评估，以此来找到最优的参数。问题二可以当做问题一的逆求解过程。

2.3 问题三的分析

在问题二的基础上，问题三又进一步泛化要求，定日镜的尺寸可以不同，安装高度也可以不同。这就意味着所有的定日镜的尺寸和安装高度可能分别都不相同，大大增加了运算量。问题三同样是复杂参数优化的单目标问题，所求目标相同，最大化单位镜面面积年平均输出功率。继续沿用上一问的模型，求解算法仍采用网格搜索法，通过圈数的递增遍历定日镜的尺寸、高度等等，进而计算出其他的参数值，完成最优模型的构建。但同时为

为了提高运算效率保证在较短的时间内找到较优的参数组合，本题引入启发式遗传算法，通过不断的迭代来优化参数组合，当达到期望的目标值时，算法停止，并返回最佳的参数组合，这种算法有效地提高运算效率。

三、问题假设

- 1、假设在经过定日镜反射前的太阳光可以近似看成平行光。
- 2、假设吸收塔塔影造成的遮挡损失与镜场中定日镜相互遮挡造成的遮挡损失相比可以忽略。
- 3、假设定日镜场的控制系统比较灵敏，使得每个时刻太阳中心发出的光经定日镜反射后正好到集热器中心。
- 4、假设定日镜场所在地面可以近似看成一个平面

四、符号相关说明

符号	符号说明	单位
H	吸收塔高度	m
h	定日镜安装高度	m
η	光学效率	
d_{HR}	定日镜中心到吸收塔中心的距离	m
DNI	法向直接辐射辐照度	KW/m ²
α	太阳高度角	度
γ	太阳方位角	度
n	定日镜个数	个
Δd	相邻两个定日镜中心之间的距离	m
ΔA_i	第 i 圈相邻两个定日镜的角度差	度
ST	当地时间	时
(x_i, y_i, z_i)	第 i 面定日镜的坐标	
r_{ij}	第 i 圈第 j 个定日镜底座中心距离吸收塔塔底中心的距离	m
He	海拔高度	km

五、模型的建立与求解

5.1 光学效率及热功率的计算

5.1.1 模型分析

本模型结合相关地理学、物理学知识，对定日镜场的光学效率、输出热功率进行分析。下面将明确一些专业名词，以及重新定义一些本模型需要用到的参数。我们构建如下示意图：

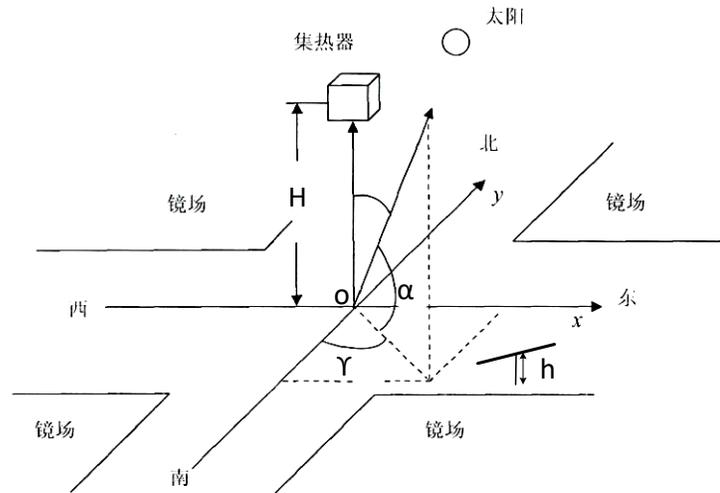


图 2 定日镜场示意图

如图 1 所示，平面 XOY 代表大地，此处将大地看作是平坦的，点 O 为镜场坐标系的原点，H 为吸收塔高度，即 $H = 80 \text{ m}$ ；h 为定日镜安装高度，即在第一问中 $h = 4 \text{ m}$ 。

太阳高度角，是指某地的太阳光线与当地地平面的所交的最小线面角，即图中所标的角 α ，这是以太阳视盘面的几何中心和理想地平线所夹的角度。参考有关太阳高度角的资料[5]，可以得到太阳高度角的求解公式如下：

$$\alpha = \arcsin(\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos w)$$

其中， δ 为太阳赤纬，计算公式^[5]为：

$$\delta = \arcsin\left(\sin \frac{2\pi D}{365} \sin\left(\frac{2\pi}{360} 23.65\right)\right)$$

D 代表以春分作为第 0 天起算的天数，在本论文中都假设春分为 3 月 21 日。当日期在 3 月 21 日前，D 为距 3 月 21 日的天数；当日期在 3 月 21 日后，D 为距 3 月 21 日已过的天数。 φ 为所在地的纬度，北纬为正；w 为太阳时角，计算公式为：

$$w = \frac{\pi}{12} |ST - 12|, ST \text{ 为当地时间}$$

方位角表示的是太阳入射光在地面投影光线的走势，如图中角 γ ，参考有关太阳方位角的资料^[4]，可以得到太阳高度角的求解公式如下：

$$\gamma = \arccos \left(\frac{\sin \delta - \sin \alpha \sin \varphi}{\cos \alpha \cos \varphi} \right)$$

定日镜的光学效率就是用来衡量定日镜实际反射的太阳能与它理论上能接收的最大太阳能之比。定日镜场的效率是由每一面定日镜的效率平均而得，而单面定日镜的光学效率又包括定日镜的余弦效率、阴影和遮挡效率、大气透射效率、截断效率和镜面反射率，每种效率分别用来衡量能量在镜场中传播时所发生的一种光学损失。定日镜的光学效率 η 的计算公式如下：

$$\eta = \eta_{sb} \eta_{cos} \eta_{at} \eta_{trunc} \eta_{ref}$$

具体指标含义见下一部分模型建立。

5.1.2 模型建立

(1) 阴影遮挡效率 η_{sb}

有面向太阳光线的迎光面就有背向太阳的阴影面，在镜场中定日镜的阴影落入另一个定日镜的镜面，或者反射光线照射到另一台定日镜的背面等现象都会发生，如下图所示。这就造成了镜场接收到的太阳光线有所损失。而阴影遮挡效率表示的是镜面未发生阴影或遮挡损失的“有效”面积占总面积的比例情况。

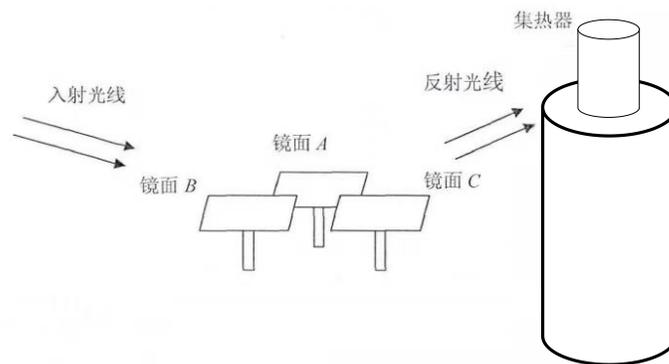


图 3 阴影遮挡损失示意图

我们查阅了相关资料，发现阴影效率的计算不仅要考虑集热器、镜面中心以及太阳的位置，还要考虑定日镜之间的相互影响，并且随着太阳位置的变化定日镜之间的损失也会

发生改变。对于阴影遮挡效率的计算，国内外学者提出了多种计算方法，从计算原理来说可分为两种：蒙特卡罗光线追踪法^[6]和平面投影法^[7]。但无论哪一种方法都需要大量实地数据，计算量大，故采用估算的方法近似阴影遮挡效率。由于镜场中心将建在东经 98.5°，北纬 39.4°的区域，我们查阅资料^[2]知定日镜场的光学效率主要跟太阳高度角有关，太阳方位角的变化只影响光学效率的分布方向，但对镜场效率的分布规律和效率值的大小几乎没有影响。且镜场中的发生阴影遮挡的面积会随着太阳高度角的增加而逐步减小，具体规律如下：

在该区域范围内太阳高度角达到 18°-23°时，镜场的阴影遮挡现象很少，阴影遮挡损失约为 0.1；当太阳高度角达到 34°左右时，镜场中的阴影遮挡现象完全消失。

因此我们以每月 21 日 5 时，10.5 时，12 时，13.5 时，15 时的太阳高度角来计算每月各时的阴影遮挡损失。

(2) 余弦效率 η_{cos}

余弦效率是太阳入射角的余弦值，太阳的入射角越小，则反射到定日镜上的有效面积越大，余弦效率就会越高。余弦效率直接影响到整个系统的发电效率，故找到较高余弦效率的镜场分布区域对于定日镜场的设计和布局非常重要。

本文以正东方向为 x 轴，正北方向为 y 轴，z 轴为天顶轴，建立镜场坐标系。如图 3 所示，OQ 是接收塔，Q 为吸热器中心，B 点为镜场中某一面定日镜的镜面中心点，B 点坐标为 (x_i, y_i, z_i) ， \vec{S} 为 B 点处太阳入射光线的方向向量， \vec{R} 为 B 点处太阳反射光线的方向向量， \vec{H} 为 B 点处定日镜的法线向量。入射角的大小取决于太阳的位置，而太阳的位置主要取决于太阳的时角 ω 、当地的地理纬度 ϕ 和太阳的赤纬角 δ 。

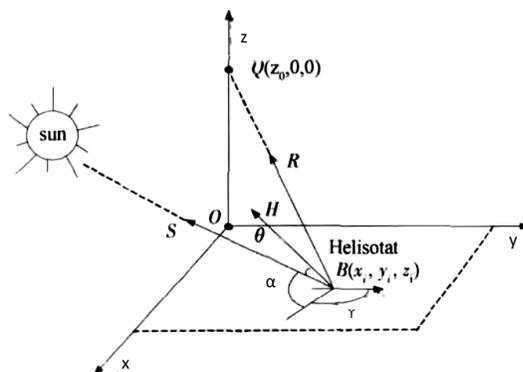


图 4 定日镜反射光线示意图

α 为该地该时刻太阳高度角， γ 为太阳方位角，太阳入射光线的方向向量 \vec{S} 为

$$\vec{S} = (\cos\alpha \sin\gamma, \cos\alpha \cos\gamma, \sin\alpha)$$

太阳反射光的方向向量 \vec{R} 为

$$\vec{R} = \left(\frac{-x_i}{\left(x_i^2 + y_i^2 + (z_0 - z_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \frac{-y_i}{\left(x_i^2 + y_i^2 + (z_0 - z_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \frac{(z_0 - z_1)}{\left(x_i^2 + y_i^2 + (z_0 - z_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

利用 $\cos 2\theta = \vec{S}\vec{R}$ ，将公式 (3) 和 (4) 代入得到：

$$\cos 2\theta = \frac{-x_i \cos\alpha \sin\gamma + y_i \cos\alpha \cos\gamma + (z_0 - z_1) \sin\alpha}{\left(x_i^2 + y_i^2 + (z_0 - z_1)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

于是可求得太阳入射角 θ 的值，即余弦效率的计算公式如下：

$$\eta_{\cos} = \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

其中 α 为该地该时刻太阳高度角， γ 为太阳方位角。

由计算公式可知不同时刻不同位置的定日镜其余弦效率不同，因此我们算出这 1745 块定日镜在每月 21 日 5 时，10.5 时，12 时，13.5 时，15 时的余弦效率，具体结果见支撑材料。接着我们以相同时刻这 1745 块定日镜的余弦效率的平均值作为整个镜场在该时刻的余弦效率，得到镜场每月 21 日 5 时，10.5 时，12 时，13.5 时，15 时的余弦效率。

(3) 大气透射率 η_{at}

阳光从定日镜反射至集热器的过程中，太阳辐射能在大气传播中的衰减所导致的能量损失称为衰减损失。在晴朗的天气中，定日镜的大气透射损失可以表成定日镜中心到集热器中心距离的函数^[8]：

$$\eta_{at} = \begin{cases} 0.993321 - 0.0001176 \cdot d_{HR} + 1.97 \times 10^{-8} \times d_{HR}^2, & d_{HR} \leq 1000 \\ e^{-0.0001106 \times d_{HR}}, & d_{HR} > 1000 \end{cases}$$

d_{HR} 为定日镜中心到吸收塔中心的距离， $d_{HR} = \sqrt{x^2 + y^2 + (H - h)^2}$ 。

(4) 截断效率 η_{trunc}

当镜场反射的光斑落入吸热器接受面时，由于光斑的特征以及定日镜的精度可能造成光斑的偏移或溢出，有部分光照射在吸热器之外，这就形成了截断损失。

截断效率可以表示为：

$$\eta_{trunc} = \frac{\text{集热器接受能量}}{\text{镜面全反射能量} - \text{阴影遮挡损失能量}}$$

截断效率的计算方法有多种但都比较麻烦，我们采用如下近似公式

$$\eta_{trunc} = \frac{DNI \cdot \eta_{at} \cdot \eta_{cos} \cdot \eta_{sb} \cdot \eta_{ref}}{DNI \cdot \eta_{cos} - DNI \cdot \eta_{cos} \cdot (1 - \eta_{sb})}$$

而在实际计算时阴影遮挡损失为一个很小的值，阴影遮挡效率大部分接近 1，故上式又简化为

$$\eta_{trunc} = \frac{DNI \cdot \eta_{at} \cdot \eta_{cos} \cdot \eta_{ref}}{DNI \cdot \eta_{cos} - DNI \cdot \eta_{cos} \cdot (1 - \eta_{sb})}$$

其中 DNI 为法向直接辐射辐照度 (KW/m²)，是指垂直于太阳光线的单位平面面积上、单位时间内接收到的太阳辐射能量，可按以下公式近似计算^[3]

$$DNI = G_0 [a + b \cdot \exp\left(\frac{-c}{\sin \alpha}\right)]$$

$$a = 0.4237 - 0.00821(6 - He)^2$$

$$b = 0.5055 + 0.00595(6.5 - He)^2$$

$$c = 0.2711 + 0.01858(2.5 - He)^2$$

G_0 为太阳常数，取值为 1.366KW/m²， He 为海拔高度，单位:千米。

(5) 镜面反射率 η_{ref}

镜面反射率是指反射镜的反射率以及镜面脏污程度的综合效率，在本文中取为 0.92。

5.1.3 模型求解与结果分析

利用 Excel 和 Python 可以求出上述模型的值，具体如下：

表 1 3月、6月、9月、12月各月 21 日各时太阳角度的情况

DATE	ST	时角余弦值	赤纬角正弦值	高度角正弦值	方位角余弦值	方位角正弦值	高度角角度
	9	0.7071	0	0.54640515	-0.54	0.844285442	33.12073905
3月21日	10.5	0.92387	0	0.713912733	-0.83	0.546507395	45.55416438
	12	1	0	0.772733573	-1	0	50.6
	13.5	0.92387	0	0.713912733	-0.83	0.546507395	45.55416438
	15	0.70710	0	0.54640515	-0.53	0.844285442	33.12073905
	9	0.7071	0.397915466	0.75385324	-0.15	0.987325846	48.92526902

6 月 21 日	10.5	0.9238	0.397915466	0.907528395	-0.54	0.835928532	65.16599791
	12	1	0.397915466	0.961491934	-1	1.49012E-08	74.04792869
	13.5	0.92387	0.397915466	0.907528395	-0.54	0.835928532	65.16599791
	15	0.70710	0.397915466	0.75385324	-0.15	0.987325846	48.92526902
<hr/>							
9 月 21 日	9	0.7071	-0.01027	0.539854825	-0.54	0.839991232	32.67375673
	10.5	0.9238	-0.01027	0.707353567	-0.84	0.541356537	45.02000014
	12	1	-0.01027	0.766171303	-1	0	50.01130914
	13.5	0.9238	-0.01027	0.707353567	-0.84	0.541356537	45.02000014
<hr/>							
12 月 21 日	9	0.7071	-0.39785	0.248766459	-0.74	0.669789291	14.40452957
	10.5	0.9238	-0.39785	0.402445898	-0.92	0.383521117	23.73117266
	12	1	-0.39785	0.45641094	-1	1.49012E-08	27.15575341
	13.5	0.9238	-0.3978	0.402445898	-0.92	0.383521117	23.73117266
<hr/>							
	15	0.7071	-0.39785	0.248766459	-0.74	0.669789291	14.40452957

上表展示了春分、夏至、秋分、冬至期间各月 21 日各时太阳角度的情况，我们可以看出当季节更替时，太阳直射点在南北回归线移动，太阳赤纬角会发生较大变化。并且随着地球自转，昼夜交替，时角会周期性变化，太阳方位角和高度角会不规律变化，说明方位角和高度角也会受地球公转影响。完整的各月各时刻太阳角度的情况见附录 8.1。

表 2 镜场光学效率各量表

日期	平均余弦效率	平均阴影遮挡效率	平均截断效率	镜面反射率	大气透射率
1 月 21 日	0.788885	1	0.887892	0.92	0.965160337
2 月 21 日	0.777914	1	0.887892	0.92	0.965160337
3 月 21 日	0.76114	0.96	0.927354	0.92	0.965160337
4 月 21 日	0.77934	1	0.887892	0.92	0.965160337
5 月 21 日	0.789317	1	0.887892	0.92	0.965160337
6 月 21 日	0.792359	1	0.887892	0.92	0.965160337

7月21日	0.789212	1	0.887892	0.92	0.965160337
8月21日	0.778637	1	0.887892	0.92	0.965160337
9月21日	0.760092	0.96	0.927354	0.92	0.965160337
10月21日	0.737835	0.96	0.927354	0.92	0.965160337
11月21日	0.718196	0.9	0.986547	0.92	0.965160337
12月21日	0.711082	0.9	0.986547	0.92	0.965160337

上表展示了镜场各月 21 日的平均余弦效率、平均阴影遮挡效率、平均截断效率、镜面反射率和大气透射率的值。根据光学效率的计算公式，可以计算出整个镜场各月的平均光学效率，计算公式如下

$$\eta_{月平均} = \frac{\sum_{i=1}^5 \sum_{k=1}^n \eta_{ik}}{5n}$$

其中 n 为定日镜总数， η_{ik} 为第 k 面定日镜在第 i 时刻的光学效率。在此基础上，我们计算每月单位面积镜面平均输出热功率 (KW/m^2)，公式如下

$$E_{月平均} = \frac{E_{field}}{A_i \cdot n}, E_{field} = DNI \cdot \sum_{i=1}^n A_i \eta_i$$

其中 DNI 为法向直接辐射辐照度， n 为定日镜总数， A_i 为第 i 面定日镜面积 (单位： m^2)， η_i 为第 i 面镜子的月平均光学效率。计算得镜场各月的平均光学效率和单位面积镜面平均输出热功率如下表所示

表 3 平均光学效率和单位面积镜面平均输出热功率表

日期	平均光学效率	单位面积镜面平均输出热功率 (KW/m^2)
1月21日	0.622097	0.649335023
2月21日	0.613438	0.629508134
3月21日	0.601805	0.598195221
4月21日	0.614565	0.632153183
5月21日	0.622440	0.650095858
6月21日	0.624849	0.655403352
7月21日	0.622358	0.649912776
8月21日	0.614018	0.630860301
9月21日	0.600978	0.596008704

10月21日	0.583369	0.544812975
11月21日	0.566322	0.487802893
12月21日	0.560702	0.46414548

有了以上各个月份的数据，便可以计算年平均输出热功率（MW/m²）和单位面积镜面年平均输出热功率（KW/m²），计算公式如下，

$$\text{单位面积镜面年平均输出热功率 } E_{\text{年平均}} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot \sum_{i=1}^{12} E_{\text{月平均}}^i}{12}$$

$$\text{年平均输出热功率} = \frac{\sum_{i=1}^{12} E_{\text{月平均}}^i}{12 \cdot 1000}$$

将各月份数据和定日镜面积代入便可求出年平均输出热功率和单位面积镜面年平均输出热功率。

5.1.4 小结

由上部分的分析和计算公式，我们可以计算出相应的光学效率和热功率，详细总结结果如下两表所示

表 5 问题一每月 21 日平均光学效率及输出功率

日期	平均光学效率	平均余弦效率	平均阴影遮挡效率	平均截断效率	单位面积镜面平均输出热功率 (KW/m ²)
1月21日	0.622097	0.788885	1	0.887892	0.649335023
2月21日	0.613438	0.777914	1	0.887892	0.629508134
3月21日	0.601805	0.76114	0.96	0.927354	0.598195221
4月21日	0.614565	0.77934	1	0.887892	0.632153183
5月21日	0.622440	0.789317	1	0.887892	0.650095858
6月21日	0.624849	0.792359	1	0.887892	0.655403352
7月21日	0.622358	0.789212	1	0.887892	0.649912776
8月21日	0.614018	0.778637	1	0.887892	0.630860301
9月21日	0.600978	0.760092	0.96	0.927354	0.596008704

10月21日	0.583369	0.737835	0.96	0.927354	0.544812975
11月21日	0.566322	0.718196	0.9	0.986547	0.487802893
12月21日	0.560702	0.711082	0.9	0.986547	0.46414548

表 6 问题一年平均光学效率及输出功率表

年平均光学效率	年平均余弦效率	年平均阴影遮挡效率	年平均截断效率	年平均输出热功率 (MW)	单位面积镜面年平均输出热功率 (KW/m ²)
0.6039	0.7653	0.9733	0.9142	37.6304	0.5990

5.2 尺寸相同条件下定日镜场的优化设计

5.2.1 模型建立与分析

首先我们可以确定所求定日镜场的参数，包括吸收塔的位置坐标、定日镜的尺寸、安装高度、定日镜的数目和定日镜的位置。所涉及到的参数较多，模型求解较复杂。因而我们通过借鉴相关资料^{[2][8]}做法，合理的将一些参数进行固定。假设吸收塔的位置坐标定在定日镜场的正中央，实际中塔式光热电站吸收塔通常位于太阳能光热发电系统的中央，可以搜集来自各个方向的经定日镜反射的太阳光，最大限度地利用太阳能，这一假设符合所求目标即使单位镜面面积年平均输出热功率最大。同时还将定日镜的形状设定为正方形，安装高度 $h = 4\text{ m}$ 保持不变。

在求问题二的变量时需要用到问题一的相关公式，例如目标项 $\max E_{average}$ 需要用到太阳角度、DNI，光学效率等。为了最大化单位镜面面积年平均输出热功率，定日镜应该尽可能地排布密集，每一圈都进行均匀布局，但也要避免遮挡。

根据题中要求，第 i 圈第 j 个定日镜底座中心距离吸收塔塔底中心 r_{ij} （规定起始时即当 $j = 1$ 时定日镜位于 x 轴正半轴，然后逆时针旋转， j 的值逐渐增加）在 100 m 和 350 m 之间。第 i 圈定日镜距吸收塔塔底中心半径满足：

$$\begin{cases} r_{ij} = r_{i-1j} + a \\ 100 \leq r_{ij} \leq 350 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3 \dots, j = 1, 2, 3 \dots)$$

其中 a 为镜面宽度。

接下来求第 i 圈任意相邻两个定日镜之间的距离 Δd ，题中要求相邻定日镜底座中心的距离 Δd 比镜面宽度 a 多 5 m 以上，又为了保证每一圈定日镜铺设尽可能密集，那么此时应有

$$\Delta d = a + 5$$

由上述变量的关系可得，相邻两个定日镜的角度差值 ΔA 与每圈的半径 r_{ij} 以及相邻两个定日镜中心距离 Δd 的关系为

$$\sin\left(\frac{\Delta A}{2}\right) = \frac{\Delta d}{2r}$$

根据图 5 中显示的定日镜场中的几何关系，由于 $r \gg \Delta d$ ，

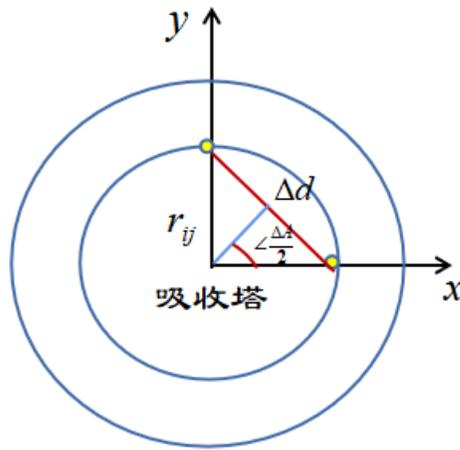


图 5 定日镜场几何模型图

所以

$$\frac{\Delta A}{2} \approx \tan\left(\frac{\Delta A}{2}\right) \approx \sin\left(\frac{\Delta A}{2}\right)$$

进而()式可以化简为:

$$\Delta A = \frac{\Delta d}{r}$$

设第 i 圈第 j 个定日镜和该圈第一个定日镜分别与吸收塔中心连线的夹角为 A_{ij} ，则该定日镜的横纵坐标分别为:

$$\begin{cases} x_{ij} = r_{ij} \cos(A_{ij}) \\ y_{ij} = r_{ij} \sin(A_{ij}) \\ A_{ij} = (j-1)\Delta A \\ \mathbf{0} \leq A_{ij} \leq 2\pi \end{cases}$$

将上述的参数约束式整理可得如下的凸优化模型：

①目标函数为

$$\max E_{average} = f(a, n), \text{ 其中 } \max E_{average} = \frac{E_{field}}{na^2}$$

②约束条件为

$$\begin{cases} r_{ij} = r_{i-1j} + a \\ \Delta d = a + 5 \\ \Delta A = \frac{\Delta d}{r} \\ x_{ij} = r_{ij} \cos(A_{ij}) \\ y_{ij} = r_{ij} \sin(A_{ij}) \\ A_{ij} = (j-1)\Delta A \\ h = 4 \\ P \geq 60MW \\ 2 \leq a \leq 8 \\ 0 \leq A_{ij} \leq 2\pi \\ 100 \leq \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2} \leq 350 \\ i = 1, 2, 3, \dots, j = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

5.2.2 模型求解

上述优化模型涉及到的定日镜的数量是离散化变量，因此利用 Python 和网格搜索算法对于满足约束条件的所有结果进行列举，进而得到全局最优解。先从第一圈即 $i = 1$ 开始，定日镜的个数逐渐增加，当某一参数不满足上述其中一个约束条件时，此时循环算法进入下一圈，重复相同的操作，直到下一个循环所有的约束条件都不满足时，退出循环。最后利用公式求出定日镜的个数，将所有符合条件的结果都列举出来，选取满足单位镜面面积年平均输出功率最大值目标的一组数值。网格搜索算法求得的最优结果如表所示：

表 7 问题二每月 21 日平均光学效率及输出功率

日期	平均光学效率	平均余弦效率	平均阴影遮挡效率	平均截断效率	单位面积镜面平均输出热功率 (KW/m ²)
1 月 21 日	0.713792	0.885723	0.98	0.940444	0.729791
2 月 21 日	0.750822	0.931672	0.98	0.940444	1.283904
3 月 21 日	0.767526	0.952400	0.98	0.940444	1.067257
4 月 21 日	0.773227	0.959474	0.98	0.940444	1.020131
5 月 21 日	0.768751	0.953919	0.98	0.940444	3.666999
6 月 21 日	0.751244	0.932195	0.98	0.940444	1.358605
7 月 21 日	0.716116	0.888607	0.98	0.940444	0.749305
8 月 21 日	0.656781	0.814980	0.98	0.940444	1.015595
9 月 21 日	0.584622	0.725440	0.98	0.940444	0.787707
10 月 21 日	0.547423	0.679281	0.98	0.940444	0.692375
11 月 21 日	0.583564	0.724127	0.98	0.940444	0.784049
12 月 21 日	0.653374	0.810752	0.98	0.940444	1.346791

表 8 问题二年平均光学效率及输出功率表

年平均光学效率	年平均余弦效率	年平均阴影遮挡效率	年平均截断效率	年平均输出热功率 (MW)	单位面积镜面年平均输出热功率 (KW/m ²)
0.6889	0.8549	0.9800	0.9404	62.1795	1.2085

表 9 问题二设计参数表

吸收塔位置坐标	定日镜尺寸 (宽×高)	定日镜安装高度 (m)	定日镜总面数	定日镜总面积 (m ²)
(0,0)	7x7	4	1050	51450

5.2.3 结果分析

根据表一的数据绘制出单位镜面面积平均输出热功率与月份的关系图，如下图所示，通过观察曲线的变化规律，可以发现 5、6 月份的单面面积镜面平均输出热功率较高，可以猜测该地区这一时间段的光线充足，气温较高。

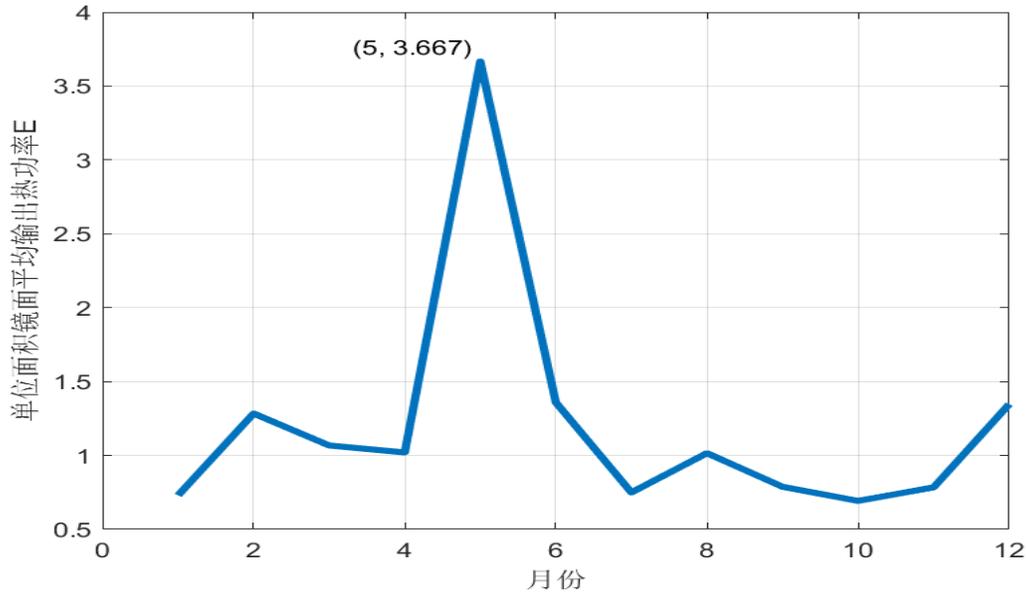


图 6 单位镜面面积平均输出热功率与月份的关系图

为了验证所得结论，已知圆形定日镜场中心位于东经 98.5° ，北纬 39.4° ，由腾讯地图定位目标位置可得该地区位于甘肃省，通过查阅中国气象局官方网站数据可知甘肃省一年中夏季是日照最为充足的日期，具体而言，在 5 月至 8 月期间夏季阳光较为充足，这段时间是甘肃省日照时间最长的时候。对比图 6 的数据，镜面平均输出热功率与甘肃省的年气温光照变化规律大体一致，部分月份存在误差，可能受海拔高度、地形地貌等因素的影响。



图 7 圆形定日镜场经纬度定位图

结合表三和附件 result2.xlsx 分析定日镜的分布规律，以吸收塔塔底中心为原点，利用 *MATLAB* 绘制定日镜位置分布散点图，如下图所示，定日镜围绕着吸收塔排布，由于计算过程角度差值是由边长近似等价表示，定日镜的位置存在一定的误差。

定日镜的位置分布图

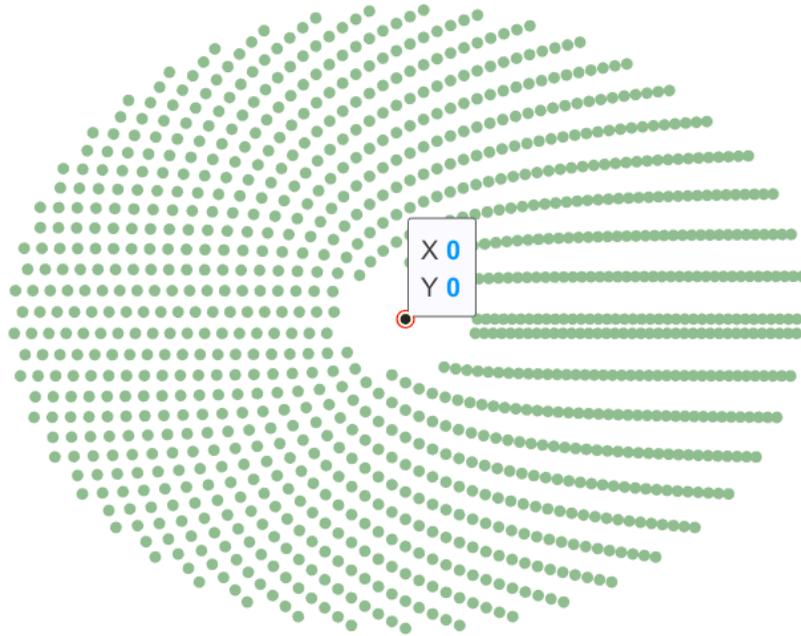


图 8 定日镜的位置关系图

5.3 尺寸不同条件下定日镜场的优化设计

5.3.1 模型建立

不难发现问题三在上一问的基础上减少了限制条件，定日镜的尺寸可以不同，安装高度也可以不同，其他条件与问题二一样，要求重新设置定日镜的参数，使单位镜面面积年平均输出功率尽可能大。同样的，我们先进行一些假设来简化约束条件，减少模型复杂度。固定吸收塔的中心点为 $(0,0)$ ，符合最大化单位镜面面积年平均输出功率。 N 个定日镜按照围绕吸收塔的方式进行 M 圈布局，每一圈都均匀布局，同时将问题简化为同一圈的定日镜尺寸相同。根据光学原理，距吸收塔越远的定日镜反射光在传播过程中损耗越大，

为了获得足够的光源能力，较大尺寸定日镜的接受和反射光线的的能力越强，因此随着离中心塔的距离越远，定日镜的尺寸逐渐增大。

问题三模型建立需要调用问题一的公式求太阳赤纬角、方向角、余弦效率、法向直接辐射照度 DNI 等。同时，问题二的模型涉及到的大部分约束条件问题三也要满足。本题相较于问题二需要对定日镜的尺寸及高度进一步优化。

给最内圈定日镜设置一个初始长度 a ，进行外循环遍历。根据问题二的最优结果，我们推断 a 的合适范围为 $3.5 - 6$ ，步进长度为 0.1 。同时引入尺寸增量 Δa ，进行内循环遍历，为提高其精度，将步进长度设置为 0.02 。由于问题三各圈的定日镜的尺寸大小不一样，根据题中的要求，相邻定日镜底座中心之间的距离比镜面宽度多 $5m$ 以上，为了尽可能提高定日镜的密集程度，直接将多的距离设定为 $5m$ ，进而可利用该条件列递归方程。问题二是利用角度差确定定日镜的个数，然而问题三用圈间隔距离算定日镜的数量，因此第 i 圈对应的定日镜的数量 n_i 为：

$$n_i = \frac{2\pi r_{ij}}{r_{i-1j} + a_i + 5} \quad (i = 2, 3 \dots, n_i \in \mathbb{Z})$$

再利用个数 n_i 推出第 i 圈相邻两个定日镜的角度差 ΔA_i 为：

$$\Delta A_i = \frac{2\pi}{n_i}$$

由上述分析，利用半径 r_{ij} 和角度差值推出定日镜的坐标，第 i 圈第 j 个定日镜的坐标可表示如下

$$\begin{cases} x_{ij} = r_{ij} \cos(A_{ij}) \\ y_{ij} = r_{ij} \sin(A_{ij}) \\ A_{ij} = (j-1)\Delta A \\ 0 \leq A_{ij} \leq 2\pi \end{cases}$$

将上述参数的约束条件进行整理可得如下优化模型：

① 目标函数为

$$\max E_{average} = \frac{E_{field}}{\sum_{i=1}^{i_{max}} n_i a_i^2} = f(a_i, n_i, h)$$

② 约束条件为

$$\left\{ \begin{array}{l}
r_{ij} = r_{i-1j} + a_i \\
3.5 \leq a_1 \leq 6 \\
a_1 = 3.5 + 0.1\lambda \\
\Delta a_i = 0.02\rho \\
n_i = \frac{2\pi r_{ij}}{r_{i-1j} + a_i + 5} \\
\Delta A_i = \frac{2\pi}{n_i} \\
x_{ij} = r_{ij} \cos(A_{ij}) \\
y_{ij} = r_{ij} \sin(A_{ij}) \\
A_{ij} = (j-1)\Delta A \\
P \geq 60MW \\
4 \leq h \leq 6 \\
2 \leq a \leq 8 \\
0 \leq A_{ij} \leq 2\pi \\
100 \leq \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2} \leq 350 \\
i = 1, 2, 3, \dots, j = 1, 2, 3, \dots
\end{array} \right.$$

其中 λ 和 ρ 都是未知正整数，借助 Python 通过不断迭代确定 λ 和 ρ 的值。

5.3.2 模型求解

本题利用 Python 和网格搜索法来找最优的参数组合。问题三相较于问题二更复杂，先定义一个函数体，输入的参数为定日镜的尺寸和高度，输出的为优化目标——单位镜面面积年平均输出热功率。题目中有多个参数需要优化，例如定日镜的尺寸和高度等。选用网格搜索法进行参数优化，采用两个嵌套循环的方式进行搜索，外循环的主要作用是遍历待优化的参数组合，内循环则是遍历各个参数的可能取值，逐步调整定日镜的尺寸和高度，按照圈数遍历定日镜坐标和各项指标，每次迭代都会输出新的单位镜面面积年平均输出热功率，与上一次迭代输出的结果进行比较，当达到相应的迭代次数时，停止优化，并得到最优解，结果如表所示：

表 10 问题三每月 21 日平均光学效率及输出功率

日期	平均光学效率	平均余弦效率	平均阴影遮挡效率	平均截断效率	单位面积镜面平均输出热功率 (KW/m ²)
----	--------	--------	----------	--------	------------------------------------

1月21日	0.729423	0.885723	0.98	0.940444	0.745773
2月21日	0.767264	0.931672	0.98	0.940444	1.312019
3月21日	0.784334	0.952400	0.98	0.940444	1.090629
4月21日	0.790160	0.959474	0.98	0.940444	1.042470
5月21日	0.785585	0.953919	0.98	0.940444	3.747301
6月21日	0.767695	0.932195	0.98	0.940444	1.388357
7月21日	0.731798	0.888607	0.98	0.940444	0.765714
8月21日	0.671164	0.814980	0.98	0.940444	1.037835
9月21日	0.597425	0.725440	0.98	0.940444	0.804957
10月21日	0.559411	0.679281	0.98	0.940444	0.707537
11月21日	0.596344	0.724127	0.98	0.940444	0.801218
12月21日	0.667682	0.810752	0.98	0.940444	1.376284

表 11 问题三年平均光学效率及输出功率表

年平均光学效率	年平均余弦效率	年平均阴影遮挡效率	年平均截断效率	年平均输出功率 (MW)	单位面积镜面年平均输出热功率 (KW/m ²)
0.7040	0.8549	0.9800	0.9404	60.4696	1.2350

表 12 问题三设计参数表

年平均光学效率	年平均余弦效率	年平均阴影遮挡效率	年平均截断效率	年平均输出功率 (MW)	单位面积镜面年平均输出热功率 (KW/m ²)
0.7040	0.8549	0.9800	0.9404	60.4696	1.2350

5.3.3 结果分析

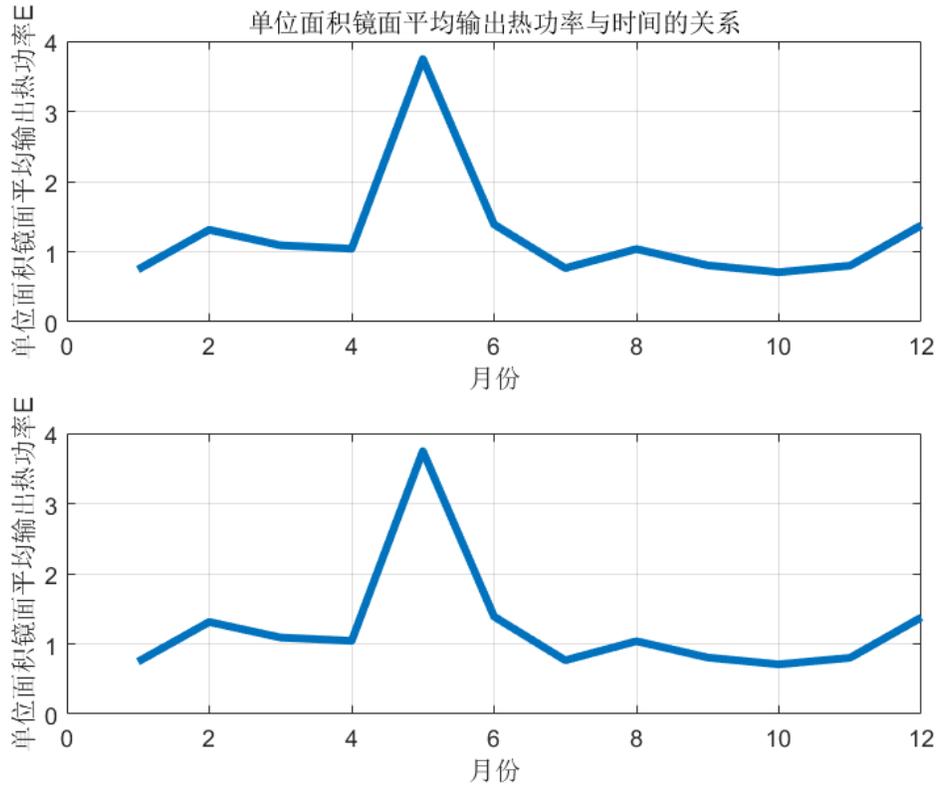


图9 单位镜面面积平均输出热功率对比图

利用 *Matlab* 对表格一的单位镜面面积平均输出热功率进行可视化处理，绘制其关于月份的变化曲线，与问题二的数据进行对比，两条曲线的变化规律大致相同，5、6月份的单面面积镜面平均输出热功率较高，与实际情况相符，说明模型的可信度较高。问题三模型复杂程度高于问题二，但是通过对比两者的表二数据发现问题三优化目标值更高，说明其比问题二的优化程度要高。

六、模型的评价与改进

6.1 阴影遮挡模型的再分析

在前文中，我们通过对相似经纬度的其他区域的数据分析，估计了该区域的阴影遮挡率。但是发现不同时刻和月份相应的阴影遮挡率变化不明显，误差比较大，那么在改进中我们将具体的分析镜场遮挡情况，提出计算阴影和遮挡面积的算法流程。

6.1.1 遮挡判别模型

如图 5 所示，左图中定日镜 A 的部分镜面因 B 的遮挡而无法接收到太阳光，此时定日镜 A 发生了阴影损失；右图中定日镜 A 反射的太阳光中，部分光线因 B 的遮挡而不能传播，此时定日镜 A 发生了遮挡损失。

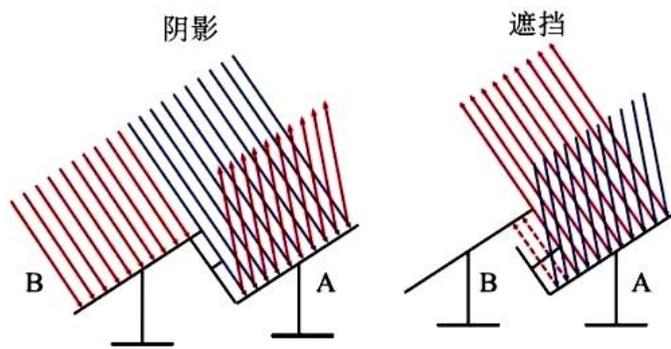


图 10 阴影和遮挡示意图

为了判断 A、B 两面镜子是否发生了遮挡（产生阴影和遮挡统称为遮挡），我们提出以下算法思路：

① 先求出定日镜 A 的向上法向量 \vec{n}_A （垂直于镜面 A 且指向天空），然后让 A 遍历所有的定日镜

② 计算从定日镜 A 的中心到定日镜 B 的中心的向量 \overline{AB} ，然后让 B 遍历其余所有定日镜

③ 让 \vec{n}_A 与 \overline{AB} 点积，然后计算出两向量之间夹角的余弦值

④ 判断遮挡：如果余弦值为负，则定日镜 B 位于 A 的背后，所以不会遮挡 A

如果余弦值大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则定日镜 B 对 A 产生了遮挡

如果余弦值大于 0 小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则定日镜 B 对 A 没有遮挡

该方法判断出的被遮挡的定日镜无论是在入射时还是折射时都是被遮挡的。

6.1.2 遮挡损失的计算

在判断出被遮挡的定日镜后，利用投影和光线追踪法^{[9][10]}计算遮挡损失，遮挡损失计算思路如下：

① 选定与被遮挡的定日镜 A 发生干涉的定日镜 B，计算定日镜 A 中心与定日镜 B 在镜场平面内的距离

② 分别计算定日镜 A 和 B 的法向量以及定日镜在镜场坐标系中的平面方程，接着计算出定日镜 A 和 B 的顶点坐标并将问题定日镜镜面按长宽等比例划分为 $m \times n$ 个网点

③ 计算太阳位置和每个网点的坐标数据

④ 从网格的第一个点开始，过该点以计算时刻入射光线的方向为方向向量作直线，求该直线与目标定日镜所在平面的交点坐标

⑤ 判断交点是否位于目标定日镜的矩形区域内，最后统计位于目标区域内的交点的个数，与总格点数的比值即为遮挡损失。

七、参考文献

- [1] 蔡志杰, 太阳影子定位[J], 数学建模及其应用. 2015, 4(4):25-33.
- [2] 刘建兴, 塔式光热电站光学效率建模仿真及定日镜场优化布置[D].
10.27205/d.cnki.gltec.2022.001089
- [3] 杜宇航等, 塔式光热电站定日镜不同聚焦策略的影响分析[J], 动力工程学报, 2020,
40(5):426-432
- [4] 丁婷婷等, 塔式系统圆形镜场中余弦效率分布的研究[J]. 科学技术与工程, 2012,
12(31): 8406-8410,8433
- [5] PV Education, Elevation Angle, <http://www.pveducation.org/pvcdrom/properties-of-sunlight/elevation-angle>, 2015/9/12
- [6] Noone C.J, Torrilhon M, Mitsos A. Heliostat field optimization: A new computationally efficient model and biomimetic layout [J]. Solar Energy, 2012, 86(2):792-803.
- [7] Leary P L,Hankins J D. Users guide for MIRVAL:A computer code for comparing designs of heliostat receiver optics for central receiver solar power plants[R]. Sandia Report,SAND-77-8280,1979.
- [8] Xiudong Wei, etc. Optimization Procedure for Design of Heliostat Field Layout of a 1MWe Solar Tower Thermal Power Plant. Proc. SPIE 6841, 2007:684119
- [9] Lipps F W, et al. Shading and blocking geometry for a solar tower concentrator with rectangular mirrors[A]. American Society of Mechanical Engineers Winter Annual Meeting.New York,1974
- [10] Wendelin, T, March 2003. Sol TRACE: A new optical modeling tool for concentrating solar optics [C]. ASME International Solar Energy Conference, 2003:253-260

八、附录

8.1 各月 21 日各时刻太阳角度的情况

DATE	ST	时角余弦值	赤纬角正弦值	高度角正弦值	方位角余弦值	方位角正弦值	高度角角度
1月21日	9	0.7071	0.338183548	0.728866469	-0.23	0.971939616	46.79145014
	10.5	0.92387	0.338183548	0.886504534	-0.62	0.778301916	62.43724214
	12	1	0.338183548	0.94185966	-1	0	70.36624461
	13.5	0.92387	0.338183548	0.886504534	-0.62	0.778301916	62.43724214
	15	0.70710	0.338183548	0.728866469	-0.23	0.971939616	46.79145014
2月21日	9	0.70710	0.184469196	0.654116134	-0.39	0.91879563	40.85266446
	10.5	0.92387	0.184469196	0.818749001	-0.75	0.65508121	54.95975931
	12	1	0.184469196	0.876560376	-1	0	61.23018694
	13.5	0.92387	0.184469196	0.818749001	-0.75	0.65508121	54.95975931
	15	0.70710	0.184469196	0.654116134	-0.39	0.91879563	40.85266446
3月21日	9	0.70710	0	0.54640515	-0.54	0.844285442	33.12073905
	10.5	0.92387	0	0.713912733	-0.83	0.546507395	45.55416438
	12	1	0	0.772733573	-1	0	50.6
	13.5	0.92387	0	0.713912733	-0.83	0.546507395	45.55416438
	15	0.70710	0	0.54640515	-0.53	0.844285442	33.12073905
4月21日	9	0.70710	0.202424906	0.663578619	-0.38	0.925627643	41.5733731
	10.5	0.92387	0.202424906	0.827618424	-0.74	0.66767674	55.85486422
	12	1	0.202424906	0.885221544	-1	0	62.27879687
	13.5	0.92387	0.202424906	0.827618424	-0.74	0.66767674	55.85486422
	15	0.70710	0.202424906	0.663578619	-0.37	0.925627643	41.5733731
5月21日	9	0.70710	0.345203069	0.731927464	-0.22	0.973960252	47.04822444
	10.5	0.92387	0.345203069	0.889138023	-0.61	0.784808593	62.76513036
	12	1	0.345203069	0.944343031	-1	0	70.79419235
	13.5	0.92387	0.345203069	0.889138023	-0.61	0.784808593	62.76513036
	15	0.7071	0.345203069	0.731927464	-0.22	0.973960252	47.04822444
6月21日	9	0.7071	0.397915466	0.75385324	-0.15	0.987325846	48.92526902
	10.5	0.9238	0.397915466	0.907528395	-0.54	0.835928532	65.16599791
	12	1	0.397915466	0.961491934	-1	1.49012E-08	74.04792869
	13.5	0.92387	0.397915466	0.907528395	-0.54	0.835928532	65.16599791
	15	0.70710	0.397915466	0.75385324	-0.15	0.987325846	48.92526902
7月21日	9	0.7071	0.343486228	0.731181801	-0.22	0.973470644	46.98556033
	10.5	0.92387	0.343486228	0.88849784	-0.62	0.783210143	62.68508886
	12	1	0.343486228	0.943739886	-1	0	70.68941689
	13.5	0.9238	0.343486228	0.88849784	-0.62	0.783210143	62.68508886
	15	0.7071	0.343486228	0.731181801	-0.22	0.973470644	46.98556033
8月21日	9	0.7071	0.193511558	0.658904688	-0.39	0.922250285	41.21639148
	10.5	0.9238	0.193511558	0.823246042	-0.75	0.661370524	55.41106763
	12	1	0.193511558	0.880955051	-1	0	61.75778607
	13.5	0.9238	0.193511558	0.823246042	-0.75	0.661370524	55.41106763
	15	0.7071	0.193511558	0.658904688	-0.39	0.922250285	41.21639148
	9	0.7071	-0.01027	0.539854825	-0.54	0.839991232	32.67375673

9	10.5	0.9238	-0.01027	0.707353567	-0.84	0.541356537	45.02000014
月	12	1	-0.01027	0.766171303	-1	0	50.01130914
21	13.5	0.9238	-0.01027	0.707353567	-0.84	0.541356537	45.02000014
日	15	0.7071	-0.01027	0.539854825	-0.54	0.839991232	32.67375673
10	9	0.7071	-0.20536	0.404406349	-0.65	0.75667013	23.85393128
月	10.5	0.9238	-0.20536	0.568343537	-0.89	0.455190246	34.63479617
21	12	1	-0.20536	0.625910622	-1	0	38.74905596
日	13.5	0.9238	-0.20536	0.568343537	-0.89	0.455190246	34.63479617
	15	0.7071	-0.20536	0.404406349	-0.65	0.75667013	23.85393128
11	9	0.7071	-0.35019	0.289521682	-0.72	0.691965161	16.829322
月	10.5	0.9238	-0.35019	0.44642186	-0.91	0.400582223	26.51434492
21	12	1	-0.35019	0.501517876	-1	0	30.10047279
日	13.5	0.9238	-0.35019	0.44642186	-0.92	0.400582223	26.51434492
	15	0.7071	-0.35019	0.289521682	-0.72	0.691965161	16.829322
12	9	0.7071	-0.39785	0.248766459	-0.74	0.669789291	14.40452957
月	10.5	0.9238	-0.39785	0.402445898	-0.92	0.383521117	23.73117266
21	12	1	-0.39785	0.45641094	-1	1.49012E-08	27.15575341
日	13.5	0.9238	-0.3978	0.402445898	-0.92	0.383521117	23.73117266
	15	0.7071	-0.39785	0.248766459	-0.74	0.669789291	14.40452957

8.2 模型求解代码

见提交的压缩文件.